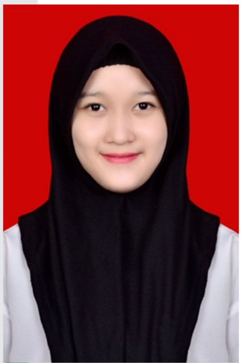
# KONSTRUKSI METODE ITERASI TANPA TURUNAN KEDUA MENGGUNAKAN FUNGSI $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

## TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Program Studi Matematika

Oleh :

**SINTIA INDAH TRIAMANDA**
**11654201269**



UIN SUSKA RIAU

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU**
**PEKANBARU**
**2019**

# LEMBAR PERSETUJUAN

## KONSTRUKSI METODE ITERASI TANPA TURUNAN KEDUA MENGGUNAKAN FUNGSI $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

**TUGAS AKHIR**

oleh:

**SINTIA INDAH TRIAMANDA**
**11654201269**

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 17 Desember 2019

| | |
|---|---|
| **Ketua Program Studi** | **Pembimbing** |
| **Ari Pani Desvina, M.Sc.** | **Wartono, M.Sc.** |
| **NIP. 19811225 200604 2 003** | **NIP. 19730818 200604 1 003** |

# LEMBAR PENGESAHAN

## KONSTRUKSI METODE ITERASI TANPA TURUNAN KEDUA MENGGUNAKAN FUNGSI $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

**TUGAS AKHIR**

oleh:

**SINTIA INDAH TRIAMANDA**
**11654201269**

Telah dipertahankan didepan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 17 Desember 2019

Pekanbaru, 17 Desember 2019
Mengesahkan,

| | |
|---|---|
| **Dekan** | **Ketua Program Studi** |
| **Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.** | **Ari Pani Desvina, M.Sc.** |
| **NIP. 19660604 199203 1 004** | **NIP. 19811225 200604 2 003** |

**DEWAN PENGUJI**

| | |
|---|---|
| **Ketua** | **: Corry Corazon Marzuki, M.Si.** |
| **Sekretaris** | **: Wartono, M.Sc.** |
| **Anggota I** | **: Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.** |
| **Anggota II** | **: Rahmawati, M.Sc.** |

# LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

# LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 17 Desember 2019

Yang membuat pernyataan,

**SINTIA INDAH TRIAMANDA**
**NIM. 11654201269**

# LEMBAR PERSEMBAHAN

*Alhamdulillahirobbil'aalamin, yang pertama dan paling utama kuucapkan rasa Syukurku pada rahmat dan kasih sayangmu ya Allah yang telah memberikan aku kemudahan dalam menuntut ilmu sehingga dapat menyelesaikan kuliah dan Tugas Akhir ini dengan baik. Dan juga tak lupa Shalawat serta salam yang selalu tercurah untuk Baginda, Kekasih Allah Yakni Nabi Besar Muhammad SAW. Yang telah membawa manusia dari alam yang penuh kegelapan dan kejahiliyahan menuju cahaya yang terang benderang dan penuh dengan ilmu pengetahuan.*

**Ayahanda Komi Syafriman, Bsc dan ibunda Nelfa Erina, Bsc.**

*Terimakasihku persembahkan kepada kedua orang tuaku yang telah membesarkanku dengan penuh kasih sayang dan pengorbanannya. Terimakasih kepada Raja kehidupan, Raja dari putri putrinya, lelaki pertama dihidupku yang selalu ada untukku. Keringat , keluh, sedih, dan kesal beliau simpan sendiri demi kebahagian keluarganya. Bagaimanapun keadaan, beliau selalu mengusahakan yang terbaik dan tetap tegar agar kami hidup dengan layak serta mendapatkan Pendidikan yang bermutu. Saya ucapkan terimakasih kepada Ratu dikehidupanku, Ratu bagi putri putrinya, tutor kehidupanku, dan sahabat hidupku. Beliau mengajarkanku bagaimana menjadi perempuan yang baik, anak yang baik, dan orang bermanfaat. Terkhusus untuk ayah dan ibundaku tercinta yang tangannya tak pernah lelah berdoa untuk kebaikanku dan kelancaran ku dalam menuntut ilmu.*

*Kalian vitamin hidupku yang tak pernah lelah dalam segala hal dan senantiasa menyebut namaku dalam doa. Terimalah persembahan karya sederhana ini sebagai bukti kesungguhanku selama menuntut ilmu.*

**Keluarga Besar**

*Terimakasih telah memberi support baik berupa semangat maupun materi selama ini, dan terimakasih kepada semua keluarga besar yang selalu mendoakanku.*

**Wartono, M.Sc**

*Terimakasih banyak telah meluangkan waktunya untuk memberi bimbingan, pengarahan dalam menyelesaikan tugas akhir ini.*

**Nilwan Andiraja, M.Sc**

*Terimakasih banyak telah meluangkan waktunya untuk memberi bimbingan, pengarahan selama ini. Beliau selalu dengan sabar mendengarkan keluhan dan ocehan dari mahasiswa bimbingannya.*

**Sahabat-Sahabatku:**

*Yang tak pernah bosan memarahi, mengkritik dan memberi semangat kepadaku. Terimakasih atas kebersamaan kita baik dalam suka maupun duka. Tiada kata yang pantas terucap selain terimakasih atas motivasi dan semua bantuannya.*

**Terimakasih Untuk seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN SUSKA RIAU terkhusus Jurusan Matematika**

# KONSTRUKSI METODE ITERASI TANPA TURUNAN KEDUA MENGGUNAKAN FUNGSI $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

**SINTIA INDAH TRIAMANDA**
**NIM: 116542011269**

Tanggal Sidang : 17 Desember 2019
Tanggal Wisuda : 2020

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

## ABSTRAK

Metode iterasi merupakan salah satu cara penyelesaian numerik untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinear. Pada Penelitian ini, penulis mengkonstruksi Metode Iterasi baru menggunakan fungsi $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ dan mereduksi turunan keduanya menggunakan fungsi $y + x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ dengan tujuan untuk mendapat orde konvergensi dan indeks efisiensi yang lebih tinggi. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh dua metode iterasi baru yang memiliki orde konvergensi empat dengan melibatkan tiga evaluasi fungsi sehingga indeks efisiensi sebesar 1,587401. Simulasi numerik dilakukan terhadap beberapa fungsi untuk menunjukkan keunggulan metode iterasi baru. Hasil simulasi tersebut menunjukkan bahwa akurasi dua metode iterasi baru lebih efektif dibandingkan dengan metode Newton, metode Chebyshev, metode Halley dan metode Newton Ganda.

**Kata Kunci:** Indeks efisiensi, Pendekatan fungsi, Orde konvergensi, Persamaan nonlinear.

# *CONSTRUCTION OF ITERATION METHODS WITHOUT SECOND DERIVATIVE USING $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ FUNCTION*

**SINTIA INDAH TRIAMANDA**
**NIM: 11654201269**

*Date of Final Exam : December, $17^{th}$ 2019*
*Date of Graduation : 2019*

*Mathematics Program Study*
*Faculty of Science and Technology*
*State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau*
*Soebrantas Street No.155 Pekanbaru*

## *ABSTRACT*

*The iteration method is one way of numerical resolution to determine the roots of nonlinear equations. In this Research, the authors construct a new iteration method using $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ and reduce the derivative of both using $y + x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ in order to obtain a convergence order and a higher efficiency index. Based on the results of the study, obtained two new iteration methods that have a four-order convergence involving three evaluation functions so that the efficiency index is 1.587401. Numerical simulations are performed on several functions to show the superiority of the new iteration method. The simulation results show that the accuracy of the two new iteration methods is more effective than the Newton method, the Chebyshev method, the Halley method and the Dual Newton method.*

**Keywords:** *Efficiency index, functional approach, order of convergence, nonlinear equations.*

# KATA PENGANTAR

*Alhamdulillahirabbil'alamiin*. Puji syukur kepada Allah Subhanahu Wa Ta'ala karena atas rahmat, karunia, nikmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"Konstruksi Metode Iterasi Tanpa Turunan Kedua Menggunakan Fungsi $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$".** Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shalallahu 'Alahi Wasallam, semoga kita semua mendapat syafaat-nya. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, arahan, dan masukan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda Syafriman, Bsc Ibunda Nelfa Erina, Bsc dan Resi Yuli Angraini, S. Pd yang selalu mendo'akan dan melimpahkan kasih sayang kepada penulis. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Akhmad Mujahidin, S.Ag, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. H. Mas'ud Zein, M.Pd., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku Sekretaris dan Pembimbing Akademik Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
5. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
6. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc., selaku Penguji I yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

7. Ibu Rahmawati, M.Sc., selaku Penguji II yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
8. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
9. Sahabat terbaik Novriwandi S.I.Kom, terima kasih atas bantuan dan segala dukungan yang telah diberikan kepada penulis.
10. Sahabat-sahabat seperjuangan penulis Tuti Adawiyah, Rini Eka Putri, Syafira Auliani, dan Safitri Wahyuni, terima kasih atas bantuan, masukan dan segala dukungan yang telah diberikan kepada penulis.
11. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir penulis Lamby Pratiwi Maytasari, Mardiiah Munthe, dan Andika Riski yang telah memberikan motivasi.
12. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi khususnya angkatan 2016 yang telah banyak memberikan bantuan, masukan serta dukungan.
13. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan tugas akhir hingga selesai, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal'alamiin*.

Pekanbaru, 17 Desember 2019

Sintia Indah Triamanda

# DAFTAR ISI

**Halaman**

# DAFTAR SIMBOL

$f(x)$ : Fungsi $f$ dari variabel bebas $x$

$f'$ : Turunan pertama fungsi $f$

$f''$ : Turunan kedua fungsi $f$

$f^{(n)}$ : Turunan ke-$n$ fungsi $f$

$O(h^n)$ : Orde hampiran

$\approx$ : Hampiran

$e$ : Galat atau *error*

! : Faktorial

$\alpha$ : Akar persamaan

$\rho$ : Nilai COC

$\{x_n\}$ : Barisan bilangan real

$EI$ : Indeks efisiensi

$p$ : Orde konvergensi

$r$ : Jumlah evaluasi fungsi

$\in$ : Anggota atau elemen

$x_0$ : Nilai awal

$R_n(x)$ : Suku sisa deret taylor

$\Re$ : Bilangan riil

# DAFTAR GAMBAR

# DAFTAR TABEL

**Tabel** **Halaman**

# DAFTAR SINGKATAN

| | | |
|---|---|---|
| *COC* | : | *Computational Order of Convergence* |
| MN | : | Metode Newton |
| MC | : | Metode Chebyshev |
| MH | : | Metode Halley |
| NG | : | Metode Newton Ganda |
| TIPE I | : | Metode Iterasi Pertama dari Persamaan Fungsi $y+ax^3+bx^2+cx+d=0$ Tanpa Turunan Kedua |
| TIPE II | : | Metode Iterasi Kedua dari Persamaan Fungsi $y+ax^3+bx^2+cx+d=0$ Tanpa Turunan Kedua |
| TNFE | : | *Total Number of Functional Evaluation* |
| IT | : | Iterasi |

# DAFTAR LAMPIRAN

**Lampiran** **Halaman**

# BAB I
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu eksakta yang berkaitan dengan rumus dan perhitungan yang dapat dijadikan sebagai alat bantu untuk menyederhanakan pembahasan suatu masalah. Pada umumnya permasalahan yang melibatkan model matematika, sering muncul dalam berbagai ilmu pengetahuan seperti fisika, kimia, ekonomi serta pada persoalan rekayasa sains yaitu teknik sipil, teknik elektro, teknik mesin dan lain sebagainya. Salah satu metode sederhana yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut adalah metode analitis. Namun, ada beberapa kasus dimana dalam proses penyelesaian masalah tersebut sulit untuk diselesaikan secara analitik sehingga dibutuhkan suatu pendekatan numerik.

Menurut (Chapra & Canale, 2007), metode numerik adalah teknik dimana masalah matematika diformulasikan sedemikian rupa sehingga dapat dipecahkan secara perhitungan atau aritmatika. Metode ini sering digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan nonlinear yang rumit dan kompleks. Beberapa bentuk dari persamaan nonlinear melibatkan bentuk trigonometri, eksponensial, logaritma dan fungsi transenden lainnya. Permasalahan yang sering ditemukan salah satunya adalah bagaimana menemukan solusi dari persamaan nonlinear dalam bentuk:

$$f(x) = 0,$$

dengan $f : D \subset \Re \to \Re$ adalah fungsi skalar di selang terbuka D.

Banyak metode numerik yang telah ditemukan untuk mencari penyelesaian persamaan nonlinear. Salah satu metode numerik yang paling terkenal adalah Metode Newton-Raphson yang dikenal dengan bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{1.1}$$

dengan $n = 0,1,2,3,$ dan $f'(x_n) \neq 0$.

Metode Newton pada Persamaan (1.2) dihasilkan dari pemotongan deret Taylor orde satu yang memiliki orde konvergensi dua dengan dua evaluasi fungsi dan indeks efisiensi $2^{1/2} \approx 1.4142$ hal ini dijelaskan oleh (Gautschi, 2012).

Selain menggunakan pemotongan deret Taylor, banyak peneliti yang menggunakan berbagai teknik pendekatan untuk menghasilkan metode iterasi. Salah satu teknik pendekatannya adalah pendekatan fungsi. Pendekatan fungsi ini telah dilakukan oleh beberapa peneliti yaitu (Amat dkk, 2003) mengkonstruksi metode iterasi dengan menggunakan Persamaan Hiperbola $ay^2 + bxy + y + cy + d = 0$, dalam bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f(x_n)}{1 + b_n\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), n \geq 0 \,\&\, b_n \in \Re,$$

dengan

$$L_f(x_n) = \frac{f(x_n) f''(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (1.2)$$

(Chun, 2007) melakukan penelitian yang sama dengan menggunakan persamaan Parabola $x^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ dan $x^2 + ax + by + c = 0$, yang masing-masing hasil iterasi dari persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(1 + a_n f'^2(x_n)) + a_n f(x_n) f''(x_n)}{2(1 + a_n f'^2(x_n)) - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; a_n \in \Re,$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2L_f(x_n)}}\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), n \geq 0,$$

dengan $L_f(x_n)$ adalah Persamaan (1.2).

Sementara itu, (Sharma, 2007) mengkonstruksi metode iterasi dengan menggunakan persamaan Parabola $ay^2 + y + bx + c = 0$ . Hasil iterasi yang dihasilkan dari konstruksi persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2} L_f(x_n)\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), n \geq 0,$$

dengan $L_f(x_n)$ adalah Persamaan (1.2).

Penelitian untuk mengkonstruksi metode iterasi tersebut dilakukan kembali oleh (Amat dkk, 2008) dengan menggunakan persamaan Hiperbola $axy + y + bx + x = 0$, dalam bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2}{2 - L_f(x_n)}\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), n \geq 0.$$

Pada tahun-tahun sebelumnya konstruksi metode iterasi menggunakan persamaan Parabola dan Hiperbola. Namun, pada tahun berikutnya (Gupta dkk, 2009) menggunakan persamaan Ellips $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{\{y - f(x_0)\}^2}{f^2(x_0)} = 1$ untuk mengkonstruksi metode iterasi baru. Metode iterasi yang dihasilkan dari konstruksi persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$x_{n+1} = x_n \pm \frac{f(x_n)}{\sqrt{f'^2(x_n) + a'^2 f^2(x_n)}}, n \geq 0,$$

dengan $L_f(x_n)$ adalah Persamaan (1.2).

Berdasarkan uraian di atas, pada Tugas Akhir ini penulis akan mengkonstruksi suatu metode iterasi baru dari persamaan fungsi $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Oleh karena metode iterasi baru memuat turunan kedua, maka untuk menghindari penggunaan turunan kedua penulis mereduksi turunan kedua tersebut menggunakan fungsi $y + x^3 + rx^2 + sx + t = 0$. Teknik ini sebelumnya pernah dilakukan oleh (Chun, 2007a, 2007b), (Xiaojian, 2008), (Yu & Xu, 2012), dan (Badrun & Wartono, 2019). Maka dari itu, pada Tugas Akhir ini penulis akan memberi judul " **Konstruksi Metode Iterasi Tanpa Turunan Kedua Menggunakan Fungsi $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$**".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas rumusan masalah yang akan dibahas pada Tugas Akhir ini adalah "Bagaimana Metode Iterasi Tanpa Turunan Kedua Menggunakan Pendekatan Fungsi $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ?".

## 1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada Tugas Akhir ini yaitu fungsi-fungsi yang digunakan merupakan persamaan nonlinear dengan *variable* tunggal dan bernilai *real*.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengkonstruksi metode iterasi baru menggunakan pendekatan fungsi tanpa turunan kedua.
2. Menentukan orde konvergensi dari metode iterasi baru.
3. Menentukan jumlah iterasi *Computational Order of Convergence* (COC).
4. Mendapatkan galat mutlak, galat relatif dan nilai-nilai fungsi $|f(x_n)|$.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan metode iterasi bentuk baru terhadap pengembangan keilmuan bidang metode numerik.
2. Dapat digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinear.
3. Menambah bentuk baru dari metode-metode iterasi yang dapat dijadikan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear.
4. Dapat dijadikan bahan dasar untuk referensi pengembangan metode lainnya.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

**BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah,batasan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian.

**BAB II LANDASAN TEORI**

Bab ini berisi toeri-teori dasar yang digunakan dalam proses penelitian.

**BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

Bab ini berisi tentang langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian pada tugas Akhir ini.

**BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN**

Bab ini berisi tentang pembahasan dan pemaparan hasil penelitian pada Tugas Akhir.

**BAB V PENUTUP**

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran yang diperoleh dari penelitian yang telah dilakukan.

# BAB II
# LANDASAN TEORI

## 2.1 Deret Taylor

Deret Taylor adalah representasi fungsi matematika sebagai penjumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret Taylor berasal dari matematikawan Inggris yang bernama Brook Taylor. Deret ini sering digunakan untuk menurunkan suatu metode numerik. Berikut diberikan teorema mengenai deret Taylor.

**Teorema 2.1 (Purcell, 2004)** Misalkan $f$ adalah sebuah fungsi yang turunan ke-$(n+1)$, $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk masing-masing $x$ dalam interval terbuka $I$ yang mengandung $\alpha$. Maka untuk masing-masing $x$ dalam $I$, terdapat $c$ diantara $x$ dan $\alpha$ sedemikian sehingga:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \quad + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + R_n(x),$$

dengan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1}, x < c < \alpha,$$

disebut suku sisa atau kesalahan *(error).*

Dengan demikian deret Taylor yang dipotong sampai suku orde ke-$n$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

dengan $P_n(x)$ adalah persamaan Taylor dalam bentuk:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (2.1)$$

**Contoh 2.1:** Hampirilah fungsi $f(x) = 2e^x + x$ ke dalam deret Taylor disekitar $x_0 = \frac{1}{3}$ hingga orde tiga.

**Penyelesaian:**

$f(x) = 2e^{3x} + x$, maka $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 5{,}76989699$,

$f'(x) = 6e^{3x} + 1$, maka $f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 17{,}30969097$,

$f''(x) = 18e^{3x}$, maka $f''\left(\dfrac{1}{3}\right) = 48{,}92907290$,

$f'''(x) = 54e^{3x}$, maka $f'''\left(\dfrac{1}{3}\right) = 146{,}78721870$.

Berdasarkan Persamaan (2.1), $f(x)$ dihampiri dengan deret Taylor sampai orde tiga dalam bentuk:

$$P_3(x) = \left(2e + \frac{1}{3}\right) + (6e+1)(x-1) + \frac{18e}{2}(x-1)^2 + \frac{54e}{6}(x-1)^3$$

$$= \frac{4}{3} + 8e + 9ex - 18ex^2 + 9ex^3$$

$$P_3(x) = \frac{4}{3} + e\left(8 + 9x - 18x^2 + 9x^3\right).$$

## 2.2 Orde Hampiran

Orde hampiran merupakan salah satu cara untuk menunjukkan ketelitian penghampiran sebuah fungsi dan dinotasikan dengan $O(h^n)$. Misalkan fungsi $f(x)$ yang rumit dapat digantikan dengan fungsi hampiran yang lebih sederhana.

**Definisi 2.1 (Mathews, 1992)** Misalkan $f(h)$ dihampiri dengan fungsi $p(h)$. Jika $|f(h) - p(h)| \le M|h^n|$, dengan $M$ adalah konstanta real dan $M > 0$, maka dikatakan bahwa $p(h)$ menghampiri $f(h)$ dengan orde penghampiran $O(h^n)$ dan dapat ditulis:

$$f(h) = p(h) + O(h^n), \tag{2.2}$$

dengan $O(h^n)$ merupakan orde galat dari penghampiran suatu fungsi.

Pada umumnya $h$ memiliki nilai yang cukup kecil yaitu kurang dari 1, maka semakin tinggi nilai $n$ maka galat atau error akan semakin kecil sehingga semakin teliti penghampiran fungsinya. Metode yang berorde $O(h^n)$ hasilnya akan lebih teliti dari pada metode yang berorde $O(h)$.

Secara umum deret Taylor digunakan untuk menghampiri nilai dari suatu fungsi, Misalkan

$$x_{i+1} = x_i + h,$$

dengan $i = 0, 1, 2,$ adalah titik-titik selebar $h$, maka hampiran fungsi $f(x_{i+1})$ dengan deret Taylor disekitar $x_i$ adalah:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) +$$

$$+ \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} f^n(x_i) + R_n(x_{i+1}),$$

$$= f(x_i) + \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{h}{2!} f''(x_i) + \quad + \frac{h}{n!} f^n(x_i) + R_n(x_{i+1}),$$

dengan

$$R_n(x_{i+1}) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(t) = O(h^{n+1}).$$

Sehingga diperoleh

$$f(x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_i) + O(h^{n+1}). \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) adalah fungsi $f(x)$ dihampiri dengan deret Taylor derajat $n$, maka suku sisanya cukup dinyatakan dengan lambang $O(h^{n+1})$.

**Contoh:** $e^h = 1 + h + O(h^2)$, Orde hampiran 2.

$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + O(h^3)$, Orde hampiran 3.

$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + O(h^4)$, Orde hampiran 4.

## 2.3 Orde Konvergensi

Orde konvergensi adalah suatu tingkat percepatan suatu metode iterasi dalam menghampiri akar-akar persamaan fungsi. Semakin besar orde konvergensi suatu metode maka akan lebih cepat dalam menghampiri akar-akar persamaan fungsi. Adapun definisi yang menyatakan tentang orde konvergensi adalah sebagai berikut.

**Definisi 2.2 (Mathews, 1992)** Misalkan $\{x_n\}$ adalah sebuah barisan yang konvergen terhadap $\alpha$ dan himpunan $e_n = x_n - \alpha$ untuk $n \geq 0$. Jika terdapat bilangan konstanta galat $K \neq 0$ dan orde konvergensi $p > 0$, dengan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = K. \tag{2.4}$$

Maka barisan $\{x_n\}$ konvergen terhadap $\alpha$ dengan orde konvergensi $p$.

Jika $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ dan $p = 4$, maka barisan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dikatakan masing-masing memiliki orde konvergensi satu, dua, tiga, dan empat.

**Definisi 2.3 (Mathews, 1992)** Diberikan $e_n = x_n - \alpha$ merupakan galat pada iterasi ke-$n$, maka didefinisikan:

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}). \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) merupakan persamaan galat. Jika diperoleh persamaan galat untuk sembarang metode iterasi, maka nilai $p$ disebut sebagai orde konvergensi. Misalkan pada contoh metode Newton yang memiliki persamaan galat $e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3)$. Berdasarkan definisi mengenai orde konvergensi, dari persamaan galat tersebut diperoleh nilai $p = 2$. Sehingga terbukti bahwa metode Newton memiliki orde konvergensi dua.

Menentukan orde konvergensi juga dapat dilakukan dengan menggunakan *Computational Order of Convergence* (COC) yaitu membandingkan hampiran dari akar-akar sebuah fungsi.

**Definisi 2.4 (Weerakon & Fernando, 2000)** Misalkan $\alpha$ adalah akar dari $f(x)$ dan andaikan $x_{n+1}, x_n$ dan $x_{n-1}$ berturut-turut adalah iterasi yang dekat dengan $\alpha$, maka *Computational Order of Convergence* (COC) yang dilambangkan dengan $\rho$ dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus:

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|}. \qquad (2.6)$$

Oleh karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, maka *Computational Order of Convergence* (COC) dari suatu barisan $\{x_n\}_{n\geq 0}$ adalah:

$$\rho \approx \frac{\ln\left|e_{n+1}/e_n\right|}{\ln\left|e_n/e_{n-1}\right|}. \qquad (2.7)$$

**Contoh 2.2 :** Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 10,$ dengan menggunakan metode Newton, tentukan iterasi untuk menentukan akar persamaan $\alpha = 2{,}1544346900,$ serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = 1{,}5$ dan toleransi galat relatif $10^{-10}$.

**Penyelesaian :**

$$f(x_n) = x^3 - 10,$$

dan

$$f'(x_n) = 3x^2.$$

Substitusikan $x_0 = 1{,}5,$ ke $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, sehingga diperoleh:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= 1{,}5 - \frac{(-6{,}62500000)}{(6{,}75000000)}$$

$$x_1 \approx 2{,}48148148.$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan cara yang sama secara berturut-turut, diperoleh:

$x_2 \approx 2{,}19564422$, $x_3 \approx 2{,}1551033$, $x_4 \approx 2{,}15443496$ dan $x_5 \approx 2{,}15443469.$

Selanjutnya akan ditentukan nilai $\rho_1$, $\rho_2$, , $\rho_n$, sehingga didapat:

$$\rho_1 = \frac{\ln\left|(x_2-\alpha)/(x_1-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_1-\alpha)/(x_0-\alpha)\right|}$$

$$= \frac{\ln\left|(2{,}19564422-2{,}15443469)/(2{,}48148148-2{,}15443469)\right|}{\ln\left|(2{,}48148148-2{,}15443469)/(1{,}5-2{,}15443469)\right|}$$

$$= 2{,}98620101.$$

Dengan cara yang sama diperoleh nilai $\rho_2 = 1{,}92226336$ dan $\rho_3 = 1{,}99754755$.

Hasil COC dari Metode Newton ditunjukkan padaTabel 2.1 berikut:

**Tabel 2.1 Hasil Iterasi dari COC Metode Newton**

| $n$ | $x_n$ | $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$ | COC |
|---|---|---|---|
| 1 | 2,48148184 | 9,81481481e-01 | - |
| 2 | 2,19564422 | 2,85837259e-01 | 2,98620101 |
| 3 | 2,15520330 | 4,04409191e-02 | 1,92226336 |
| 4 | 2,15443496 | 7,68339066e-04 | 1,99754755 |

Berdasarkan Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa metode Newton memiliki orde konvergensi dua dengan $\rho \approx 2$.

## 2.4 Indeks Efisiensi

**Definisi 2.5 (Traub, 1964)** Misalkan $w$ adalah jumlah dari evaluasi pada fungsi atau salah satu dari derivatifnya, maka efisiensi dari suatu metode diukur dengan indeks efisiensi yang didefinisikan oleh:

$$E = p^{1/q}. \tag{2.8}$$

dengan $p$ adalah orde konvergensi dari dari suatu metode.

Nilai indeks efisiensi bergantung pada orde konvergensi dan jumlah evaluasi fungsi. Semakin besar nilai indeks efisiensi, maka semakin efektif metode tersebut dalam menyelesaikan persamaan nonlinear. Contohnya metode Newton memiliki orde konvergensi dua dan dua evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$, sehingga indeks efisiensi metode Newton adalah $2^{1/2} \approx 1{,}4142$. Metode

Chebyshev memiliki orde konvergensi tiga dan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f'(y_n)$, sehingga nilai indeks efisiensi metode Chebyshev adalah $3^{1/3} \approx 1{,}4422$.

Berdasarkan penjelasan sebelumnya, sehingga dapat disimpulkan bahwa metode Chebyshev lebih efektif dari pada metode Newton. Hal itu dikarenakan indeks efisiensi metode Chebyshev lebih tinggi dibandingkan metode Newton.

## 2.5 Metode Iterasi yang dikonstruksi dari Fungsi Linear dan Orde Konvergensinya

Metode iterasi yang berasal dari fungsi linear salah satunya metode iterasi Newton-Raphson. Metode ini merupakan metode iterasi yang sangat sering digunakan dalam menyelesaikan permasalahan matematika dalam bentuk persamaan nonlinear.

Bentuk fungsi linear yang digunakan dalam membuat meode Newton-Raphson adalah:

$$y = ax + b. \tag{2.9}$$

Melalui titik $(x_n, y(x_n))$, maka Persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk:

$$y(x) - y(x_n) = a(x - x_n) + b. \tag{2.10}$$

Kemudian, tentukan turunan pertama Persamaan (2.10), maka diperoleh:

$$y'(x_n) = a. \tag{2.11}$$

Persamaan (2.11) disubstitusikan ke Persamaan (2.10) sehingga diperoleh:

$$y(x) - y(x_n) = y'(x_n)(x - x_n) + b. \tag{2.12}$$

Ambil $x = x_n$ maka Persamaan (2.12) dapat ditulis dalam bentuk:

$$y(x_n) - y(x_n) = y'(x_n)(x_n - x_n) + b. \tag{2.13}$$

Berdasarkan Persamaan (2.13) maka diperoleh nilai $b = 0$. Nilai $b$ dan $a$ disubstitusikan ke Persamaan (2.10) maka diperoleh:

$$y(x) - y(x_n) = y'(x_n)(x - x_n),$$

atau

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n)\,. \tag{2.14}$$

Persamaan (2.14) diasumsikan berpotongan di sumbu-$x$ pada titik $(x_{n+1},0)$, sehingga $y(x_{n+1}) = 0$ dan Persamaan (2.10) menjadi:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\,,$$

$$0 = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\,. \tag{2.15}$$

Apabila diberikan kondisi $y(x_n) = f(x_n), y'(x_n) = f'(x_n)$, diperoleh:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0\,. \tag{2.16}$$

Menggunakan operasi matematika dari Persamaan (2.16) diperoleh metode iterasi Newton-Raphson dengan bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0 \text{ dan } f'(x_n) \neq 0\,. \tag{2.17}$$

Persamaan (2.17) merupakan metode Newton-Raphson yang memiliki orde konvergensi satu dengan melibatkan dua evaluasi fungsi. Selanjutnya, orde konvergensi metode Newton-Raphson akan dijelaskan pada teorema dibawah ini.

**Teorema 2.2 (Burden, dkk., 1991)** Asumsikan $\alpha \in D$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ dengan $f : D \subset \Re$ yang terdiferensial pada interval terbuka $D$. Jika $x_0$ cukup dekat ke $\alpha$, maka Persamaan (2.17) diperoleh persamaan galat:

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3)\,, \tag{2.18}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)},\ j = 2, 3, 4, \cdots$ .

**Bukti :** Misalkan $\alpha$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f''(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = e_n + \alpha$, dengan menggunakan deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi $f(x_n)$ di sekitar $\alpha$, maka diperoleh:

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!} + (x_n - \alpha)^2 + \cdots .$$

Oleh karena $x_n = e_n + \alpha$ dan $f(x) = 0$, maka

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left( e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!\,f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)} \right)$$

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left( e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4) \right). \tag{2.19}$$

Selanjutnya dengan menggunakan deret Taylor dari $f'(x_n)$ disekitar $\alpha$ diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left( 1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4) \right). \tag{2.20}$$

Pembagian dari Persamaan (2.19) dan (2.20) diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)\left( e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4) \right)}{f'(\alpha)\left( 1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4) \right)},$$

atau

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{\left( e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4) \right)}{\left( 1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4) \right)}. \tag{2.21}$$

Misalkan $u = 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4)$ maka dengan menggunakan deret

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$, dapat diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left( e_n - c_2 e_n^2 + \left( 2c_2^2 - 2c_3 \right) e_n^3 + O(e_n^4) \right). \tag{2.22}$$

Selanjutnya substitusikan Persamaan (2.22) ke Persamaan (2.17) diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \left( e_n - c_2 e_n^2 + O(e_n^3) \right). \tag{2.23}$$

Oleh karena $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$ dan $x_n = \alpha + e_n$, maka Persamaan (2.17) diperoleh:

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3). \tag{2.24}$$

Persamaan (2.24) merupakan persamaan galat untuk metode Newton yang menunjukkan bahwa metode Newton memiliki orde konvergensi dua.

## 2.6 Metode Iterasi yang dikonstruksi dari Fungsi Kuadratik

Metode iterasi yang memiliki orde konvergnsi tiga seperti Chebysev dan Halley dapat dihasilkan dari pemotongan deret Taylor orde dua. Selain itu, menggunakan pendekatan fungsional yang berasal dari fungsi kuadratik juga dapat digunakan untuk menghasilkan metode iterasi yang sama. Fungsi kuadratik yang digunakan tersebut ditulis dalam bentuk:

$$ax^2 + y + bx + c = 0 . \tag{2.25}$$

Melalui titik $\left(x_n, y(x_n)\right)$ sehingga persamaan (2.25) dapat ditulis dalam bentuk:

$$a(x - x_n)^2 + \left(y(x) - y(x_n)\right) + b(x - x_n) + c = 0 . \tag{2.25a}$$

Selanjutnya, turunan pertama dan turunan kedua dari Persamaan (2.25a) dapat ditulis dalam bentuk:

$$2a(x - x_n) + y'(x) + b = 0 , \tag{2.25b}$$

dan

$$2a + y''(x) = 0 . \tag{2.25c}$$

Dengan mengambil $x = x_n$ maka persamaan (2.25c) dapat ditulis dalam bentuk:

$$2a + y''(x_n) = 0 . \tag{2.26}$$

Berdasarkan Persamaan (2.26) diperoleh nilai $a$ sebagai berikut:

$$a = \frac{-y''(x_n)}{2} . \tag{2.27}$$

Persamaan (2.27) disubstitusikan ke Persamaan (2.25b) dan dengan mengambil $x = x_n$, maka diperoleh nilai $b$ sebagai berikut:

$$b = -y'(x_n) . \tag{2.28}$$

Selanjutnya, Persamaan (2.27) dan (2.28) disubstitusikan ke Persamaan (2.25a) dan dengan mengambil $x = x_n$, maka diperoleh nilai $c$ sebagai berikut:

$$c = 0 .$$

Menggunakan teknik substitusi maka diperoleh bentuk baru dari Persamaan (2.25a) sebagai berikut:

$$\left(\frac{-y''(x_n)}{2}\right)(x - x_n)^2 + y(x) - y(x_n) + \left(-y'(x_n)\right)(x - x_n) + = 0 ,$$

atau

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{y''(x_n)}{2}(x - x_n)^2 . \tag{2.29}$$

Asumsikan Persamaan (2.29) berpotongan di sumbu-$x$ pada titik $(x_{n+1},0)$, maka sedemikian hingga $y(x_{n+1})=0$,sehingga diperoleh:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1}-x_n) + \frac{y''(x_n)}{2}(x_{n+1}-x_n)^2$$

$$0 = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1}-x_n) + \frac{y''(x_n)}{2}(x_{n+1}-x_n)^2 . \tag{2.30}$$

Apabila diberikan kondisi $y(x_n)=f(x_n), y'(x_n)=f'(x_n)$, diperoleh:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1}-x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1}-x_n)^2 = 0 . \tag{2.31}$$

Berdasarkan Persamaan (2.31) diperoleh bentuk umum dari persamaan berikut, dalam bentuk:

$$Ah^2 + Bh + C = 0. \tag{2.32}$$

Persamaan (2.31) yang biasa disebut dengan Deret Taylor orde dua dapat diselesaikan dengan dua teknik operasi matematika sehingga diperoleh metode iterasi Chebyshev dan Halley.

### 2.6.1 Metode Chebyshev dan Orde Konvergensinya

Pada Persamaan (2.31) kedua ruas dikurang dengan $f(x_n)$ dan $f''(x_n)(x_{n+1}-x_n)$, sehingga persamaan menjadi:

$$f'(x_n)(x_{n+1}-x_n) = -f(x_n) - \frac{f''(x_n)}{2}(x^*_{n+1}-x_n)^2 . \tag{2.33}$$

Persamaan (2.33) dikali dengan $\frac{1}{f'(x_n)}$, maka diperoleh:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}(x^*_{n+1}-x_n)^2 ,$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}(x^*_{n+1}-x_n)^2 , \tag{2.34}$$

dengan $x_{n+1}^*$ Persamaan (2.17) sehingga diperoleh metode Chebyshev dalam bentuk berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n) f^2(x_n)}{2f'^3(x_n)}. \tag{2.35}$$

Persamaan (2.35) merupakan metode Chebyshev yang memiliki orde konvergensi tiga dengan melibatkan tiga evaluasi fungsi. Selanjutnya, orde konvergensi metode Chebyshev akan dijelaskan pada teorema dibawah ini.

**Teorema 2.2 (Burden, dkk., 1991)** Asumsikan $\alpha \in D$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ dengan $f: D \subset R$ yang terdiferensial pada interval terbuka $D$. Jika $x_0$ cukup dekat ke $\alpha$, maka Persamaan (2.35) diperoleh persamaan galat:

$$e_{n+1} = (-c_3 + c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4), \tag{2.36}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, 4, \cdots$.

**Bukti :** Misalkan $\alpha$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = e_n + \alpha$, dengan menggunakan deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi $f(x_n)$ di sekitar $\alpha$, maka diperoleh:

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right). \tag{2.37}$$

Selanjutnya dengan menggunakan deret Taylor dari $f'(x_n)$ disekitar $\alpha$ diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right). \tag{2.38}$$

Dengan melakukan hal yang sama, ekspansi $f''(x_n)$ disekitar $\alpha$ dalam bentuk:

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 6c_3 e_n + 12c_4 e_n^2 + 20c_5 e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.39}$$

Pembagian dari Persamaan (2.37) dan (2.38) diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)},$$

atau

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)\right)}. \tag{2.40}$$

Misalkan $u = 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)$ maka dengan menggunakan deret $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 +$ , dapat diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(e_n - c_2e_n^2 + \left(2c_2^2 - 2c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right). \tag{2.41}$$

Persamaan (2.37) dikuadratkan dan dikali dengan Persamaan (2.39), sehingga diperoleh:

$$f^2(x_n)f''(x_n) = 2c_2e_n^2 + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\,. \tag{2.42}$$

Selanjutnya, Persamaan (2.38) dipangkatkan 3 dan dikali dengan 2 maka diperoleh:

$$2f'^3(x_n) = 2 + 12c_2e_n + (18c_3 + 24c_2^2)e_n^2 + (24c_4 + 72c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3$$
$$O(e_n^4)\,. \tag{2.43}$$

Persamaan (2.41), (2.42) dan (2.43) disubstitusikan ke Persamaan (2.35) diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n + (-c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\,.$$

Oleh karena $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$ dan $x_n = \alpha + e_n$, diperoleh:

$$e_{n+1} = (-c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\,. \tag{2.44}$$

Persamaan (2.44) merupakan persamaan galat untuk metode Chebyshev yang menunjukkan bahwa metode Chebyshev memiliki orde konvergensi kubik.

### 2.6.2 Metode Halley dan Orde Konvergensinya

Deret Taylor pada Persamaan (2.32) dikali 2 sehingga dapat ditulis dalam bentuk:

$$2f(x_n) + 2f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 = 0\,,$$

atau

$$2f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)\left(2f'(x_n) + f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)\right) = 0\,. \tag{2.45}$$

Kedua ruas pada Persamaan (2.45) di kurang dengan $2f(x_n)$, maka persamaan tersebut menjadi:

$$(x_{n+1}-x_n)\big(2f'(x_n)+f''(x_n)(x_{n+1}-x_n)\big)=-2f(x_n)\,. \tag{2.46}$$

Selanjutnya, Persamaan (2.46) dibagi dengan $2f'(x_n)+f''(x_n)(x_{n+1}-x_n)$, sehingga diperoleh:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{-2f(x_n)}{2f'(x_n)+f''(x_n)(x^*_{n+1}-x_n)},$$

atau

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)}{2f'(x_n)+f''(x_n)(x^*_{n+1}-x_n)},$$

dengan $x^*_{n+1}$ Persamaan (2.17) sehingga diperoleh metode Halley dalam bentuk berikut:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n)-f(x_n)f''(x_n)}\,. \tag{2.47}$$

Persamaan (2.47) merupakan metode Halley yang memiliki orde konvergensi tiga dengan melibatkan tiga orde konvergensi. Selanjutnya, orde konvergensi metode Halley akan dijelaskan pada teorema dibawah ini

**Teorema 2.2 (Burden, dkk., 1991)** Asumsikan $\alpha \in D$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ dengan $f: D\subset R$ yang terdiferensial pada interval terbuka $D$. Jika $x_0$ cukup dekat ke $\alpha$, maka Persamaan (2.47) diperoleh persamaan galat:

$$e_{n+1}=(-c_3+c_2^2)e_n^3+O(e_n^4)\,, \tag{2.48}$$

dengan $e_n=x_n-\alpha$ dan $c_j=\dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j=2,3,4,\cdots$.

**Bukti :** Misalkan $\alpha$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha)=0$. Asumsikan $f'(\alpha)\neq 0$ dan $x_n=e_n+\alpha$, dengan menggunakan deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi $f(x_n)$ di sekitar $\alpha$, maka diperoleh:

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right). \tag{2.49}$$

Selanjutnya dengan menggunakan deret Taylor dari $f'(x_n)$ disekitar $\alpha$ diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right). \tag{2.50}$$

Dengan melakukan hal yang sama, ekspansi $f''(x_n)$ disekitar $\alpha$ dalam bentuk:

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 6c_3 e_n + 12c_4 e_n^2 + 20c_5 e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.51}$$

Selanjutnya, Persamaan (2.51) dikali dengan Persamaan (2.50) serta dikali dengan 2, maka diperoleh:

$$2f(x_n)f'(x_n) = 2e_n + 6c_2 e_n^2 + (8c_3 + 4c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.52}$$

Jika Persamaan (2.50) dikuadratkan dan dikali dengan 2 maka akan diperoleh:

$$2f'^2(x_n) = 2 + 8c_2 e_n + (12c_3 + 8c_2^2)e_n^2 + (16c_4 + 24c_2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.53}$$

Kemudian Persamaan (2.49) dikali dengan Persamaan (2.51) sehingga diperoleh:

$$f(x_n)f''(x_n) = 2c_2 e_n + (2c_2^2 + 6c_3)e_n^2 + (8c_2c_3 + 12c_4)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.54}$$

Persamaan (2.53) dikurang dengan Persamaan (2.54) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} 2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n) &= 2 + 6c_2 e_n + (6c_3 + 6c_2^2)e_n^2 \\ &\quad + (4c_4 + 16c_2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Kemudian Persamaan (2.52) dan Persamaan (2.55) disubstitusikan ke Persamaan (2.47) diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n + (-c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4).$$

oleh karena $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$ dan $x_n = \alpha + e_n$ diperoleh:

$$e_{n+1} = (-c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.56}$$

Persamaan (2.56) merupakan persamaan galat untuk metode Halley yang menunjukkan bahwa metode Halley memiliki orde konvergensi kubik.

# BAB III
# METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini, metodologi yang digunakan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini adalah metode studi kepustakaan yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi-informasi yang berasal dari sumber berupa buku, jurnal, dan artikel yang berhubungan dengan penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam metodologi penelitian ini adalah :

1. Mendefinisikan salah satu persamaan fungsi dalam bentuk:
$$y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,. \tag{3.1}$$
2. Melalui titik $(x_n, y(x_n))$ sehingga Persamaan (3.1) dapat ditulis dalam bentuk:
$$\big(y(x) - y(x_n)\big) + a(x - x_n)^3 + b(x - x_n)^2 + c(x - x_n) + d = 0\,. \tag{3.2a}$$
3. Menentukan turunan pertama dan turunan kedua dari Persamaan (3.2a) menggunakan teknik turunan implisit, sehingga diperoleh:
$$y'(x) + 3a(x - x_n)^2 + 2b(x - x_n) + c = 0\,, \tag{3.2b}$$
dan
$$y''(x) + 6a(x - x_n) + 2b = 0\,. \tag{3.2c}$$
4. Menghitung nilai $b, c$ dan $d$ menggunakan Persamaan (3.2a), (3.2b) dan (3.2c).
5. Nilai $b, c$ dan $d$ disubstitusikan ke Persamaan (3.2a) sehingga persamaan tersebut menjadi:
$$\big(y(x) - y(x_n)\big) + a(x - x_n)^3 - \frac{y''(x_n)}{2}(x - x_n)^2 - y'(x_n)(x - x_n) = 0\,. \tag{3.3}$$
6. Persamaan (3.3) diasumsikan berpotongan di sumbu-$x$ pada titik $(x_{n+1}, 0)$, sehingga $y(x_{n+1}) = 0$ dan diberikan kondisi $y(x_n) = f(x_n), y'(x_n) = f'(x_n)$ dan $y''(x_n) = f''(x_n)$, sehingga diperoleh bentuk umum sebagai berikut:
$$Ah^3 + Bh^2 + Ch + D = 0,$$

dengan,

$h = (x_{n+1} - x_n),$

$A = a,$

$B = -\dfrac{f''(x_n)}{2},$

$C = -f'(x_n),$ dan

$D = -f(x_n).$

7. Mempertimbangkan kembali teknik yang digunakan pada metode Chebyshev dan Halley maka diperoleh dua bentuk umum metode iterasi sebagai berikut:

$$h_1 = \frac{-D}{Ah^2 + Bh + C}\ , \tag{3.4a}$$

dan

$$h_2 = \frac{-Ah^3 - Bh^2 - D}{C}\ . \tag{3.4b}$$

8. Oleh karena bentuk umum metode iterasi pada Persamaan (3.4a) dan (3.4b) terdapat turunan kedua $f''(x_n)$, maka $f''(x_n)$ direduksi dengan menggunakan persamaan $y + x^3 + rx^2 + s + t = 0$ dan dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f''(x_n) = -6x_n - 2r\ . \tag{3.5}$$

9. Selanjutnya Persamaan (3.5) disubstitusikan ke Persamaan (3.4a) dan Persamaan (3.4b) maka diperoleh dua metode iterasi baru tanpa turunan kedua.
10. Menentukan orde konvergensi dan indeks efisiensi berdasarkan persamaan iterasi yang dihasilkan.
11. Membuat simulasi numerik menggunakan bahasa pemrograman *Maple 13*.

# BAB V

# PENUTUP

## 5.1 Kesimpulan

Metode iterasi biasanya dikonstruksi dengan menggunakan pemotongan deret Taylor. Selain menggunakan pemotongan deret Taylor tersebut, metode iterasi dapat dikonstruksi menggunakan pendekatan fungsi. Salah satu fungsi yang dapat digunakan untuk menghasilkan metode iterasi baru yaitu $y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Fungsi tersebut telah menghasilkan dua metode iterasi baru tanpa turunan kedua, dengan mereduksi turunan kedua yang terdapat pada metode iterasi tersebut menggunakan fungsi $y + x^3 + rx^2 + sx + t = 0$. Adapun metode iterasi tersebut yaitu metode iterasi Tipe I dan metode iterasi Tipe II dalam bentuk sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(\frac{2A_f^2}{f'^6(x_n)f^2(x_n)} + \frac{A_f}{f'^3(x_n)f(x_n)} + 1\right), \tag{5.1}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f'^6(x_n)f^3(x_n)}{f'(x_n)A_f^2 + f(x_n)f'^4(x_n)A_f - f'^7(x_n)f^2(x_n)}, \tag{5.2}$$

dengan $A_f = f(w_n)f'^3(x_n) - \theta f^3(x_n)$.

Metode iterasi Tipe I dan metode iterasi Tipe II memiliki orde konvergensi empat dengan melibatkan tiga evaluasi fungsi sehingga menghasilkan indeks efisiensi sebesar 1,587401 dan memiliki persamaan galat,

$$e_{n+1} = \left(-c_2c_3 + 5c_2^3\right)e_n^4 + O(e_n^5), \tag{5.3}$$

dan

$$e_{n+1} = \left(-c_2c_3 + 2c_2^3\right)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{5.4}$$

Berdasarkan simulasi numerik yang diperoleh, metode iterasi Tipe I dan metode iterasi Tipe II dengan menggunakan persamaan kuartik lebih cepat mencapai kekonvergenan jika dibandingkan dengan metode Newton, metode Chebyshev, metode Halley dan metode Newton Ganda. Hal ini ditunjukkan pada jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan dengan beberapa metode lainnya.

## 5.2 Saran

Pada tugas akhir ini penulis terinspirasi oleh (Chun, 2007) dan (Sharma, 2007) yang mengkonstruksi metode iterasi menggunakan pendekatan fungsi persamaan Parabola $x^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ dan $x^2 + ax + by + c = 0$. Selanjutnya, turunan kedua pada metode iterasi tersebut dapat direduksi dengan menggunakan pendekatan fungsi lainnya seperti yang telah dilakukan oleh (Chun, 2007) dan (Xiaojian, 2008). Penulis menyarankan kepada para pembaca agar dapat mengembangkan hasil metode iterasi yang telah diperoleh penulis, sehingga diperoleh orde konvergensi yang lebih tinggi dan lebih efektif.

# DAFTAR PUSTAKA

Amat, S., Busquier, S., dan Gutierrez, J.M. "Geometric Constructions of Iterative Functions to Solve Nonlinear Equations". *Journal of Computational and Applied Mathematics.* Vol. 157, hal. 197-205, 2003.

Amat, S., Busquier, S., Gutierrez, J.M., dan Hernandez, M. A. "On The Global Convergence of Chebysev's Iterative Method". *Journal of Computational and Applied Mathematics.* Vol. 220, hal. 17-21, 2008.

Atkinson, K. E. "*An Introduction To Numerical Analysis" Second Editon*. Hal. 56. John Wiley & Son, Inc, New York. 1989.

Badrun, S., dan Wartono. "Modifikasi Metode Weerakoon-Fernando dengan Orde Konvergensi Empat". *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika.* Vol. 5, hal. 133-140, 2019.

Behl, R., Kanwar, V. "Variants of Chebyshev's Method with Optimal Orde of Convergence". *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciencesi*. Vol. 29, hal 39-53, 2013.

Behl, R., Kanwar, V., dan Sharma, K. K. "Another Simple Way of Deriving Several Iterative Functions to Solve Nonlinear Equations". *Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics*. Vol. 2012, hal. 1-21, 2012.

Burden, L.C., dan J. D. Faires. *"Numerical Analysis*". Ninth Edition. 2010.

Chapra, S. C., dan Canale, R. P. "*Numerical Methods for Engineers*". Hal. 1. Mc Graw-Hill Book Company. New York. 1985.

Chun, C. "Some Third-Orde Families of Iterative Methods for Solving Nonlinear Equation". *Applied Mathematics and Computation.* Vol. 188, hal. 924-933, 2007.

Chun, C. "A One-Parameter Family of Third-Order Methods to Solve Nonlinear Equations". *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 189, hal. 126-130, 2007.

Chun, C. "Some Variants Of Chebyshev-Halamanley Methods Free From Second Derivative". *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 191, hal. 193-198, 2007.

Chun, C. "Some Second-Derivative-Free Variants Of Chebyshev-Halley Methods". *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 191, hal. 410-414, 2007.

Gautschi, W. "*Numerical Analysis, Second Edition"*. Hal. 261. Birkhauser, New York. 2012.

Gupta, K. C., Kanwar, V., dan Kumar, S. "A Family Of Ellips Methods For Solving Non-Linear Equations". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Vol. 4, hal. 571-575, 2009.

Iyengar, S. R. K., Jain, R. K., "*Numerical Methods"*. Hal. 11-14. New Age International (p) Ltd, New York. 2009.

Kanwar, V., Singh, S., dan Bakshi, S. "Simple Geometric Constructions of Quadratically and Cubically Convergent Iterative Functions to Solve Nonlinear Equations". *Numer Algor*. Vol. 47, hal. 95-107, 2008.

Kung, H. T., dan Traub, J. F. "Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration". *Journal of the Association for Computing Machinery*. Vol. 21, hal. 643-651, 1974.

Mathews, J. H. "*Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering, 2nd*". Prentice Hall International, Inc. New York. 1992.

Melman, A. "Geometry and Convergence of Euler's and Halley's Methods". *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Vol. 39, hal. 728-235, 1997.

Purcell, E. J. "*Kalkulus Edisi Kesembilan*". Jilid 2. Hal. 107-108. Penerbit Erlangga, Jakarta. 2008.

Sharma, J. R. "A Family of Third-Order Methods to Solve Nonlinear Equations by Quadratic Curves Approximation". *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 184, hal. 210-215, 2007.

Traub, J. F. "*Iterative Methods for The Solution Of Equations*". Hal. 18-21. Prentice Hall. New York. 1964.

Weerakoon, S., dan Fernando, T. G. I. "A Variant Of Newton Method With Accelerated Third-Orde Convergence". *Applied Mathematics Letters*. Vol. 13. hal. 87-93, 2000.

Xiaojian, Z. " Modified Chebyshev-Halley Methods Fee From Second Derivative". *Applied Mathematics and Computation.* Vol. 203, hal. 824-827, 2008.

Yu, X., dan Xu, X. " A New Family Of Chebyshev-Halley Like Methods Free From Second Derivative". *Fixed Point Theory*. Vol. 13, hal. 319-325, 2012.

# LAMPIRAN A

## Orde Konvergensi Metode Iterasi Tipe I

> $restart;$

> $Order := 8:$

> $xn := en + \text{alpha};$

$$xn := en + \alpha$$

> $fxn := collect\left(expand\left(series\left(fa\cdot\left(en + c2\cdot en^2 + c3\cdot en^3 + c4\cdot en^4 + c5\cdot en^5 + c6\cdot en^6 + O\left(en^7\right)\right), en\right)\right), [en]\right);$

$$fxn := fa\ en + fa\ c2\ en^2 + fa\ c3\ en^3 + fa\ c4\ en^4 + fa\ c5\ en^5 + fa\ c6\ en^6 + O\left(en^7\right)$$

> $dfxn := diff(fxn, en);$

$$dfxn := fa + 2\,fa\ c2\ en + 3\,fa\ c3\ en^2 + 4\,fa\ c4\ en^3 + 5\,fa\ c5\ en^4 + 6\,fa\ c6\ en^5 + O\left(en^6\right)$$

> $hasil1 := collect\left(expand\left(series\left(\frac{fxn}{dfxn}, eniries\right)\right), [en]\right);$

$$hasil1 := \left(fa\ en + fa\ c2\ en^2 + fa\ c3\ en^3 + fa\ c4\ en^4 + fa\ c5\ en^5 + fa\ c6\ en^6 + O\left(en^7\right)\right) \Big/ \left(fa + 2\,fa\ c2\ en + 3\,fa\ c3\ en^2 + 4\,fa\ c4\ en^3 + 5\,fa\ c5\ en^4 + 6\,fa\ c6\ en^5 + O\left(en^6\right)\right)$$

> $wn := collect(expand(series(xn - hasil1, en)), [en]);$

$$wn := \alpha + c2\ en^2 + \left(2\,c3 - 2\,c2^2\right) en^3 + \left(-7\,c2\ c3 + 3\,c4 + 4\,c2^3\right) en^4 + \left(-10\,c2\ c4 + 4\,c5 - 6\,c3^2 + 20\,c3\ c2^2 - 8\,c2^4\right) en^5 + \left(-13\,c2\ c5 + 5\,c6 - 17\,c4\ c3 + 28\,c4\ c2^2 + 33\,c2\ c3^2 - 52\,c3\ c2^3 + 16\,c2^5\right) en^6 + O\left(en^7\right)$$

> $sn := collect(expand(series(wn - \text{alpha}, en)), [en]);$

$$sn := c2\ en^2 + \left(2\,c3 - 2\,c2^2\right) en^3 + \left(-7\,c2\ c3 + 3\,c4 + 4\,c2^3\right) en^4 + \left(-10\,c2\ c4 + 4\,c5 - 6\,c3^2 + 20\,c3\ c2^2 - 8\,c2^4\right) en^5 + \left(-13\,c2\ c5 + 5\,c6 - 17\,c4\ c3 + 28\,c4\ c2^2 + 33\,c2\ c3^2 - 52\,c3\ c2^3 + 16\,c2^5\right) en^6 + O\left(en^7\right)$$

> $fwn := collect\left(expand\left(series\left(fa\cdot\left(sn + c2\cdot sn^2 + c3\cdot sn^3 + c4\cdot sn^4 + c5\cdot sn^5 + c6\cdot sn^6\right), en\right)\right), [en]\right);$

$$fwn := fa\, c2\, en^2 + \left(2\, fa\, c3 - 2\, c2^2\, fa\right) en^3 + \left(-7\, c2\, fa\, c3 + 3\, fa\, c4 + 5\, fa\, c2^3\right) en^4 + \left(-10\, c2\, fa\, c4 + 4\, fa\, c5 - 6\, fa\, c3^2 + 24\, fa\, c3\, c2^2 - 12\, fa\, c2^4\right) en^5 + \left(-13\, c2\, fa\, c5 + 5\, fa\, c6 - 17\, fa\, c4\, c3 + 34\, fa\, c4\, c2^2 + 37\, fa\, c3^2\, c2 - 73\, fa\, c3\, c2^3 + 28\, fa\, c2^5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $A_f := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(\left(fwn \cdot dfxn^3 - \mathrm{theta} \cdot fxn^3\right), en\right)\right), [en]\right)\right);$

$$A_f := fa^4\, c2\, en^2 + \left(4\, fa^4\, c2^2 + 2\, fa^4\, c3 - \theta\, fa^3\right) en^3 + \left(-3\,\theta\, fa^3\, c2 + 14\, fa^4\, c2\, c3 + 5\, fa^4\, c2^3 + 3\, fa^4\, c4\right) en^4 + \left(-3\,\theta\, fa^3\, c2^2 - 3\,\theta\, fa^3\, c3 + 24\, fa^4\, c2^2\, c3 + 20\, fa^4\, c2\, c4 + 2\, fa^4\, c2^4 + 4\, fa^4\, c5 + 12\, fa^4\, c3^2\right) en^5 + \left(-6\,\theta\, fa^3\, c3\, c2 - \theta\, fa^3\, c2^3 - 3\,\theta\, fa^3\, c4 + 26\, fa^4\, c2\, c5 + 34\, fa^4\, c2^2\, c4 + 37\, fa^4\, c2\, c3^2 + 12\, fa^4\, c2^3\, c3 + 34\, fa^4\, c4\, c3 + 5\, fa^4\, c6\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $B := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(\frac{fxn}{dfxn} \cdot \left(\frac{2 \cdot A_f^2 \cdot dfxn}{dfxn^7 \cdot fxn^2} + \frac{A_f}{dfxn^3 \cdot fxn} + 1\right), en\right)\right), [en]\right)\right);$

$$B := en - \frac{\theta}{fa}\, en^3 - \frac{c2\left(5\, c2^2\, fa - fa\, c3 - \theta\right)}{fa}\, en^4 + \frac{1}{fa^2}\left(2\, fa^2\, c2\, c4 + 36\, fa^2\, c2^4 - 32\, fa^2\, c2^2\, c3 + 13\, fa\, c2^2\,\theta + fa\, c3\,\theta + 2\,\theta^2 + 2\, fa^2\, c3^2\right) en^5 - \frac{1}{fa^2}\left(-3\, fa^2\, c5\, c2 - 7\, fa^2\, c3\, c4 + 105\, fa\, c2^3\,\theta - 262\, fa^2\, c2^3\, c3 + 48\, fa^2\, c2^2\, c4 + 66\, fa^2\, c2\, c3^2 + 18\,\theta^2\, c2 - \theta\, fa\, c4 - 50\, fa\, c2\,\theta\, c3 + 170\, fa^2\, c2^5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $x_{n+1} := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(xn - B, en\right)\right), [en]\right)\right);$

$$x_{n+1} := \alpha + \frac{\theta}{fa}\, en^3 + \frac{c2\left(5\, c2^2\, fa - fa\, c3 - \theta\right)}{fa}\, en^4 - \frac{1}{fa^2}\left(2\, fa^2\, c2\, c4 + 36\, fa^2\, c2^4 - 32\, fa^2\, c2^2\, c3 + 13\, fa\, c2^2\, \theta + fa\, c3\, \theta + 2\, \theta^2 + 2\, fa^2\, c3^2\right) en^5 + \frac{1}{fa^2}\left(-3\, fa^2\, c5\, c2 - 7\, fa^2\, c3\, c4 + 105\, fa\, c2^3\, \theta - 262\, fa^2\, c2^3\, c3 + 48\, fa^2\, c2^2\, c4 + 66\, fa^2\, c2\, c3^2 + 18\, \theta^2\, c2 - \theta\, fa\, c4 - 50\, fa\, c2\, \theta\, c3 + 170\, fa^2\, c2^5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $e_{n+1} := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(x_{n+1} - \text{alpha}, en\right)\right), [en]\right)\right);$

$$e_{n+1} := \frac{\theta}{fa}\, en^3 + \frac{c2\left(5\, c2^2\, fa - fa\, c3 - \theta\right)}{fa}\, en^4 - \frac{1}{fa^2}\left(2\, fa^2\, c2\, c4 + 36\, fa^2\, c2^4 - 32\, fa^2\, c2^2\, c3 + 13\, fa\, c2^2\, \theta + fa\, c3\, \theta + 2\, \theta^2 + 2\, fa^2\, c3^2\right) en^5 + \frac{1}{fa^2}\left(-3\, fa^2\, c5\, c2 - 7\, fa^2\, c3\, c4 + 105\, fa\, c2^3\, \theta - 262\, fa^2\, c2^3\, c3 + 48\, fa^2\, c2^2\, c4 + 66\, fa^2\, c2\, c3^2 + 18\, \theta^2\, c2 - \theta\, fa\, c4 - 50\, fa\, c2\, \theta\, c3 + 170\, fa^2\, c2^5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $x_{n+1} := eval\left(x_{n+1}, [\text{theta} = 0]\right);\ e_{n+1} := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(x_{n+1} - \text{alpha}, en\right)\right), [en]\right)\right);$

$$x_{n+1} := \alpha + \frac{c2\left(5\, c2^2\, fa - fa\, c3\right)}{fa}\, en^4 - \frac{2\, fa^2\, c2\, c4 + 36\, fa^2\, c2^4 - 32\, fa^2\, c2^2\, c3 + 2\, fa^2\, c3^2}{fa^2}\, en^5 + \frac{1}{fa^2}\left(-3\, fa^2\, c5\, c2 - 7\, fa^2\, c3\, c4 - 262\, fa^2\, c2^3\, c3 + 48\, fa^2\, c2^2\, c4 + 66\, fa^2\, c2\, c3^2 + 170\, fa^2\, c2^5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

$$e_{n+1} := \left(5\, c2^3 - c2\, c3\right) en^4 + \left(-2\, c2\, c4 - 36\, c2^4 + 32\, c3\, c2^2 - 2\, c3^2\right) en^5 + \left(-3\, c2\, c5 - 7\, c4\, c3 - 262\, c3\, c2^3 + 48\, c4\, c2^2 + 66\, c2\, c3^2 + 170\, c2^5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

# LAMPIRAN B

## Orde Konvergensi Metode Iterasi Tipe II

> $restart;$

> $Order := 8:$

> $xn := en + \text{alpha};$

$$xn := en + \alpha$$

> $fxn := collect\left(expand\left(series\left(fa\cdot\left(en + c2\cdot en^2 + c3\cdot en^3 + c4\cdot en^4 + c5\cdot en^5 + c6\cdot en^6 + O\left(en^7\right)\right), en\right)\right), [en]\right);$

$$fxn := fa\ en + fa\ c2\ en^2 + fa\ c3\ en^3 + fa\ c4\ en^4 + fa\ c5\ en^5 + fa\ c6\ en^6 + O\left(en^7\right)$$

> $dfxn := diff\,(fxn, en);$

$$dfxn := fa + 2\,fa\ c2\ en + 3\,fa\ c3\ en^2 + 4\,fa\ c4\ en^3 + 5\,fa\ c5\ en^4 + 6\,fa\ c6\ en^5 + O\left(en^6\right)$$

> $hasil1 := collect\left(expand\left(series\left(\frac{fxn}{dfxn}, eniries\right)\right), [en]\right);$

$$hasil1 := \left(fa\ en + fa\ c2\ en^2 + fa\ c3\ en^3 + fa\ c4\ en^4 + fa\ c5\ en^5 + fa\ c6\ en^6 + O\left(en^7\right)\right) / \left(fa + 2\,fa\ c2\ en + 3\,fa\ c3\ en^2 + 4\,fa\ c4\ en^3 + 5\,fa\ c5\ en^4 + 6\,fa\ c6\ en^5 + O\left(en^6\right)\right)$$

> $wn := collect\,(expand\,(series\,(xn - hasil1, en)), [en]);$

$$wn := \alpha + c2\ en^2 + \left(2\,c3 - 2\,c2^2\right) en^3 + \left(-7\,c2\ c3 + 3\,c4 + 4\,c2^3\right) en^4 + \left(-10\,c2\ c4 + 4\,c5 - 6\,c3^2 + 20\,c3\ c2^2 - 8\,c2^4\right) en^5 + \left(-13\,c2\ c5 + 5\,c6 - 17\,c4\ c3 + 28\,c4\ c2^2 + 33\,c2\ c3^2 - 52\,c3\ c2^3 + 16\,c2^5\right) en^6 + O\left(en^7\right)$$

> $sn := collect\,(expand\,(series\,(wn - \text{alpha}, en)), [en]);$

$$sn := c2\ en^2 + \left(2\,c3 - 2\,c2^2\right) en^3 + \left(-7\,c2\ c3 + 3\,c4 + 4\,c2^3\right) en^4 + \left(-10\,c2\ c4 + 4\,c5 - 6\,c3^2 + 20\,c3\ c2^2 - 8\,c2^4\right) en^5 + \left(-13\,c2\ c5 + 5\,c6 - 17\,c4\ c3 + 28\,c4\ c2^2 + 33\,c2\ c3^2 - 52\,c3\ c2^3 + 16\,c2^5\right) en^6 + O\left(en^7\right)$$

> $fwn := collect\left(expand\left(series\left(fa\cdot\left(sn + c2\cdot sn^2 + c3\cdot sn^3 + c4\cdot sn^4 + c5\cdot sn^5 + c6\cdot sn^6\right), en\right)\right), [en]\right);$

$$fwn := fa\,c2\,en^2 + \left(2\,fa\,c3 - 2\,c2^2\,fa\right) en^3 + \left(-7\,c2\,fa\,c3 + 3\,fa\,c4 + 5\,fa\,c2^3\right) en^4 + \left(-10\,c2\,fa\,c4 + 4\,fa\,c5 - 6\,fa\,c3^2 + 24\,fa\,c3\,c2^2 - 12\,fa\,c2^4\right) en^5 + \left(-13\,c2\,fa\,c5 + 5\,fa\,c6 - 17\,fa\,c4\,c3 + 34\,fa\,c4\,c2^2 + 37\,fa\,c3^2\,c2 - 73\,fa\,c3\,c2^3 + 28\,fa\,c2^5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $A_f := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(\left(fwn \cdot dfxn^3 - \mathrm{theta} \cdot fxn^3\right), en\right)\right), [en]\right)\right);$

$$A_f := fa^4\,c2\,en^2 + \left(4\,fa^4\,c2^2 + 2\,fa^4\,c3 - \theta\,fa^3\right) en^3 + \left(-3\,\theta\,fa^3\,c2 + 14\,fa^4\,c2\,c3 + 5\,fa^4\,c2^3 + 3\,fa^4\,c4\right) en^4 + \left(-3\,\theta\,fa^3\,c2^2 - 3\,\theta\,fa^3\,c3 + 24\,fa^4\,c2^2\,c3 + 20\,fa^4\,c2\,c4 + 2\,fa^4\,c2^4 + 4\,fa^4\,c5 + 12\,fa^4\,c3^2\right) en^5 + \left(-6\,\theta\,fa^3\,c3\,c2 - \theta\,fa^3\,c2^3 - 3\,\theta\,fa^3\,c4 + 26\,fa^4\,c2\,c5 + 34\,fa^4\,c2^2\,c4 + 37\,fa^4\,c2\,c3^2 + 12\,fa^4\,c2^3\,c3 + 34\,fa^4\,c4\,c3 + 5\,fa^4\,c6\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $B := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(\left(dfxn^6 \cdot fxn^3\right) / \left(dfxn \cdot A_f^2 + fxn \cdot dfxn^4 \cdot \left(A_f - dfxn^3 \cdot fxn\right)\right), en\right)\right), [en]\right)\right);$

$$B := -en + \frac{\theta}{fa}\,en^3 + \frac{c2\left(2\,c2^2\,fa - \theta - fa\,c3\right)}{fa}\,en^4 - \frac{1}{fa^2}\left(2\,fa^2\,c2\,c4 + 2\,fa^2\,c3^2 + 2\,\theta^2 + 4\,fa\,c2^2\,\theta - 14\,fa^2\,c2^2\,c3 + fa\,c3\,\theta + 11\,fa^2\,c2^4\right) en^5 + \mathrm{O}\left(en^6\right)$$

> $x_{n+1} := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(xn + B, en\right)\right), [en]\right)\right);$

$$x_{n+1} := \alpha + \frac{\theta}{fa}\,en^3 + \frac{c2\left(2\,c2^2\,fa - \theta - fa\,c3\right)}{fa}\,en^4 - \frac{1}{fa^2}\left(2\,fa^2\,c2\,c4 + 2\,fa^2\,c3^2 + 2\,\theta^2 + 4\,fa\,c2^2\,\theta - 14\,fa^2\,c2^2\,c3 + fa\,c3\,\theta + 11\,fa^2\,c2^4\right) en^5 + \mathrm{O}\left(en^6\right)$$

> $e_{n+1} := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(x_{n+1} - \mathrm{alpha}, en\right)\right), [en]\right)\right);$

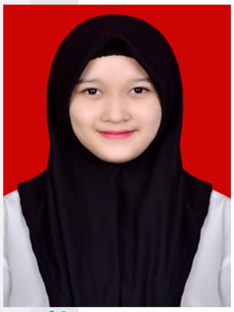
$$e_{n+1} := \frac{\theta}{fa}\, en^3 + \frac{c2\left(2\, c2^2\, fa - \theta - fa\, c3\right)}{fa}\, en^4 - \frac{1}{fa^2}\left(2\, fa^2\, c2\, c4 + 2\, fa^2\, c3^2 + 2\, \theta^2 + 4\, fa\, c2^2\, \theta - 14\, fa^2\, c2^2\, c3 + fa\, c3\, \theta + 11\, fa^2\, c2^4\right) en^5 + \mathrm{O}\left(en^6\right)$$

> $x_{n+1} := eval\left(x_{n+1}, [\mathrm{theta} = 0]\right);\ e_{n+1} := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(x_{n+1} - \mathrm{alpha}, en\right)\right), [en]\right)\right);$

$$x_{n+1} := \alpha + \frac{c2\left(2\, c2^2\, fa - fa\, c3\right)}{fa}\, en^4 - \frac{2\, fa^2\, c2\, c4 + 2\, fa^2\, c3^2 - 14\, fa^2\, c2^2\, c3 + 11\, fa^2\, c2^4}{fa^2}\, en^5 + \mathrm{O}\left(en^6\right)$$

$$e_{n+1} := \left(2\, c2^3 - c2\, c3\right) en^4 + \left(-2\, c2\, c4 - 2\, c3^2 + 14\, c3\, c2^2 - 11\, c2^4\right) en^5 + \mathrm{O}\left(en^6\right)$$

# DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis lahir pada tanggal 06 September 1998 di Duri. Sebagai anak ketiga dari tiga bersaudara pasangan Bapak Syafriman dan Ibu Nelfa Erina. Penulis menyelesaikan pendidikan formal pada Sekolah Dasar Negeri 32 Mandau, Kabupaten Bengkalis, Provinsi Riau tahun 2010. Pada tahun 2013 penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di SMP Negeri 4 Mandau, Kabupaten Bengkalis, Provinsi Riau dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas dengan Jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di SMAN 3 Mandau, Kabupaten Bengkalis, Provinsi Riau pada tahun 2016. Pada tahun 2016 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika.

Pada bulan Januari tahun 2019 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Kependudukan Pencatatan Sipil Kota Pekanbaru Provinsi Riau dengan judul **"Pengaruh Jumlah Penduduk dan Rasio Ketergantungan Terhadap PDRB Harga Konstan di Kota Pekanbaru"** yang dibimbing oleh ibu Rahmadeni, M.Si dan diseminarkan pada 29 Mei 2019. Pada bulan Juli-Agustus 2019 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Kota Kandis, Kec. Kandis, Kabupaten Siak. Bulan Desember Tahun 2019 penulis telah menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"Konstruksi Metode Iterasi Tanpa Turunan Kedua Menggunakan Fungsi $\boldsymbol{y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$** dibawah bimbingan bapak Wartono, M.Sc di Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika.